

CNC

Bahn des Fräskopfes berechnen (in 2 Dimensionen)

Koordinatensystem:

Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt im Schwerpunkt des Teils.

Vorzeichen des Drehsinns:

Drehungen im Gegenuhrzeigersinn haben ein positives Vorzeichen.

Richtungsvektoren:

Alle Richtungsvektoren sind Einheitsvektoren.

Kontur:

Diese Berechnung beschäftigt sich mit der Aussenkontur (Aussenumriss) des Werkstücks, nicht mit Innenkonturen (Ausbrüche u.Ä.).

Die Kontur des Werkstücks wird durch ihre Eckpunkte \vec{S}_i beschrieben. Die Eckpunkte sind gleichzeitig auch die Schnittpunkte der Kanten des Werkstücks, die durch die Richtungsvektoren \vec{t}_i beschrieben werden

$$\vec{t}_i = \frac{\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i}{|\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i|} .$$

(Das „t“ steht auch für „Tangente“). Jeder Punkt $\vec{p}_i(l_i)$ der Kontur wird durch

$$\vec{p}_i(l_i) = \vec{S}_{i-1} + l_i \cdot \vec{t}_i$$

beschrieben. l_i ist der Längenparameter

$$0 \leq l_i \leq |\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i| = L_i ;$$

d.h.

$$\vec{p}_i(L_i) = \vec{S}_{i-1} + L_i \cdot \vec{t}_i = \vec{S}_i \text{ und } L_i \cdot \vec{t}_i = (\vec{S}_i - \vec{S}_{i-1}) .$$

L_i ist die Länge der Kontur zwischen \vec{S}_{i-1} und \vec{S}_i . Beim Fräsen werden die I Eckpunkte in der Reihenfolge

$$\vec{S}_0 , \vec{S}_1 , \dots , \vec{S}_i , \dots , \vec{S}_{I-1}$$

im Gegenuhrzeigersinn umfahren.

Der Fräser soll den Radius r haben. Die Bahn des Fräskopfes ist der Weg, den der Mittelpunkt des Fräasers zurücklegt. Die Eckpunkte der Bahn sind

$$\vec{B}_0 , \vec{B}_1 , \dots , \vec{B}_i , \dots , \vec{B}_{I-1} .$$

Sie muss parallel zu den Kanten des Werkstücks verlaufen, aber um r „nach aussen“ versetzt. D.h. der Mittelpunkt des Fräasers befindet sich immer um die Distanz r entlang des Richtungsvektors \vec{s}_i von der Kontur versetzt. Der Vektor \vec{s}_i steht senkrecht auf dem

Richtungsvektor \vec{t}_i der zugehörigen Kante. D.h. mit $\vec{t}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix}$ und $\vec{s}_i = \begin{pmatrix} s_{i,x} \\ s_{i,y} \end{pmatrix}$ soll gelten:

$$\vec{t}_i \times \vec{s}_i = 1 \quad . \text{ Also ist } \vec{s}_i = \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix}, \text{ denn } \vec{t}_i \times \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = t_{i,x}^2 + t_{i,y}^2 = 1 \quad \text{und}$$

$$\vec{t}_i \cdot \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = -t_{i,x}t_{i,y} + t_{i,y}t_{i,x} = 0 \quad , \text{ wie gewünscht.}$$

Hier noch ein paar Eigenschaften der Richtungsvektoren \vec{t}_i und \vec{s}_i :

$$\vec{t}_i \cdot \vec{t}_{i+1} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} = t_{i,x}t_{i+1,x} + t_{i,y}t_{i+1,y} = -\cos E_i$$

E_i ist der Innenwinkel zwischen der i -ten und der $i+1$ -ten Abschnitt der Kontur; der Winkel dessen Scheitel im Eckpunkt \vec{S}_{i+1} liegt.

$$\vec{t}_i \times \vec{t}_{i+1} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} = t_{i,x}t_{i+1,y} - t_{i,y}t_{i+1,x} = \sin E_i \quad .$$

$$\vec{s}_i \times \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = -t_{i,y}t_{i+1,x} + t_{i,x}t_{i+1,y} = \vec{t}_i \times \vec{t}_{i+1} = \sin E_i \quad .$$

$$\vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = t_{i,y}t_{i+1,y} + t_{i,x}t_{i+1,x} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} = -\cos E_i$$

$$\vec{t}_i \cdot \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = -t_{i,x}t_{i+1,y} + t_{i,y}t_{i+1,x} = \vec{t}_{i+1} \times \vec{t}_i = -\sin E_i$$

$$\vec{t}_{i+1} \cdot \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = -t_{i+1,x}t_{i,y} + t_{i+1,y}t_{i,x} = \vec{t}_i \times \vec{t}_{i+1} = \sin E_i$$

$$\vec{t}_i \times \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = t_{i,x}t_{i+1,x} + t_{i,y}t_{i+1,y} = \vec{t}_{i+1} \cdot \vec{t}_i = -\cos E_i$$

$$\vec{t}_{i+1} \times \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = t_{i+1,x}t_{i,x} + t_{i+1,y}t_{i,y} = \vec{t}_{i+1} \cdot \vec{t}_i = -\cos E_i$$

So, jetzt geht's weiter: „Nach aussen versetzt“ bedeutet, weil der Nullpunkt des Koordinatensystems sich im Schwerpunkt des Werkstücks befindet, und es sich um die Aussenkontur handelt, dass die Fräsbahn durch die Punkte

$$\vec{b}(l_i) = \vec{p}(l_i) - r\vec{s}_i = \vec{S}_{i-1} - r\vec{s}_i + l_i \cdot \vec{t}_i$$

verläuft. Dass vor $r \cdot \vec{s}_i$ ein Minuszeichen stehen muss sieht man wie folgt: Die obere Kante der Kontur verläuft in den beiden oberen Quadranten des Koordinatensystems, und wird im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Angenommen,

$$\vec{t}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \text{ Dann ist } \vec{s}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} . \text{ Damit die Fräsbahn „nach aussen“ versetzt}$$

verläuft, muss folglich vor $r \cdot \vec{s}_i$ also das Minuszeichen stehen.

Der Eckpunkt \vec{B}_i der Fräsbahn, beim Eckpunkt \vec{S}_i der Kontur, ist durch den Schnittpunkt der Bahnabschnitte $\vec{b}_i(l_i)$ und $\vec{b}_{i+1}(l_{i+1})$ gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \vec{S}_{i-1} - r \vec{s}_i + w_i \cdot \vec{t}_i = \vec{S}_i - r \vec{s}_{i+1} + w_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} \\ (\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i) + r(\vec{s}_{i+1} - \vec{s}_i) + w_i \cdot \vec{t}_i - w_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} &= 0 \end{aligned}$$

Definitionsgemäss ist $(\vec{S}_i - \vec{S}_{i-1}) = L_i \cdot \vec{t}_i$, also

$$r(\vec{s}_{i+1} - \vec{s}_i) + (w_i - L_i) \cdot \vec{t}_i - w_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} = 0 .$$

w_i und w_{i+1} sind die Weglängen, die der Fräser entlang der Bahn von \vec{B}_i nach \vec{B}_{i+1} bzw. von \vec{B}_{i+1} nach \vec{B}_{i+2} zurückgelegt hat. Durch skalare Multiplikation mit \vec{s}_i und mit \vec{s}_{i+1} bekommt man daraus

$$\begin{aligned} r((\vec{s}_{i+1} \cdot \vec{s}_i) - 1) - w_{i+1} \cdot (\vec{t}_{i+1} \cdot \vec{s}_i) &= 0 \\ r(-\cos E_i - 1) - w_{i+1} \cdot \sin E_i &= 0 \\ w_{i+1} &= -\frac{r(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} . \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r(1 - (\vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1})) + (w_i - L_i) \cdot (\vec{t}_i \cdot \vec{s}_{i+1}) &= 0 \\ r(1 + \cos E_i) + (w_i - L_i) \cdot (-\sin E_i) &= 0 \\ -r(1 + \cos E_i) + (w_i - L_i) \cdot \sin E_i &= 0 \\ w_i &= \left(L_i + \frac{r(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} \right) . \end{aligned}$$

Was bedeutet das? Na ja, man muss bedenken, dass der Nullpunkt ($w_{i+1} = 0$) der Fräserbahn entlang der Kontur von \vec{S}_{i+1} nach \vec{S}_{i+2} querab von \vec{S}_{i+1} liegt. Wenn der Winkel E_i gerade $+90^\circ$ beträgt (d.h. es geht „linksherum“ um die Ecke bei \vec{S}_{i+1}), dann ist

$$w_{i+1} = -\frac{r(1)}{1} = -r ,$$

und

$$w_i = \left(L_i + \frac{r(1)}{1} \right) = (L_i + r) .$$

Die zweite Gleichung bedeutet, dass der Fräser entlang dem Bahnstück von \vec{B}_i nach \vec{B}_{i+1} um die Länge r (nämlich einen Fräserradius) über das Ende der Konturkante hinausfahren muss. Die erste Gleichung besagt, dass er auf dem Bahnstück von \vec{B}_{i+1} nach \vec{B}_{i+2} eine Sonderschicht von der Länge r einlegen muss, bevor er auf gleicher Höhe mit dem Beginn der $i+1$ -ten Kante der Kontur ist.

Das alles gilt, wenn der rechte Winkel ein „Aussenwinkel“ ist, d.h. einen konvexen Konturabschnitt bildet. Wenn der rechte Winkel „linksherum“ geht, dann beträgt er -90° und der Sinus im Nenner wechselt das Vorzeichen:

$$w'_{i+1} = -\frac{r(1)}{-1} = r \quad \text{und} \quad w'_i = \left(L_i + \frac{r(1)}{-1} \right) = (L_i - r) .$$

Damit wollen die Gleichungen sagen, dass (zweite Gleichung) der Fräser nun schon um die Länge r vor Erreichen des Winkels aufhören darf; bzw. (erste Gleichung) er auch sofort schon die Länge r des nächsten Bahnstücks gefräst hat.

Also, die Gleichungen beschreiben offenbar die Verhältnisse bei „eckigen“ Konturen richtig. Jetzt kommen die Rundungen ;-).

Wenn die Ecken abgerundet werden sollen, dann soll die Kontur einen Kreisbogen beschreiben, dessen Tangenten die anschliessenden geraden Kanten bilden. Der Mittelpunkt des Kreisbogens liegt deshalb auf der Winkelhalbierenden der Kanten; und zwar innerhalb der Kontur, wenn es sich um einen „Aussenwinkel“ (konvexer Konturabschnitt), und ausserhalb der Kontur, wenn es um einen „Innenwinkel“ geht (konkaver Konturabschnitt).

Der Kreisbogenradius an der Ecke zwischen \vec{S}_i und \vec{S}_{i+1} soll R_i betragen. Da, wo sich die beiden („Innen-“) Parallelen, mit Abstand R_i zu den Kanten, schneiden, liegt der Mittelpunkt des Kreisbogens. Die Parallele zur i -ten Kante wird durch

$$\vec{p}_i(l_i) + R_i \cdot \vec{s}_i = \vec{S}_{i-1} + l_i \cdot \vec{t}_i + R_i \cdot \vec{s}_i ,$$

die zur $i+1$ -ten Kante durch

$$\vec{p}_{i+1}(l_{i+1}) + R_i \cdot \vec{s}_{i+1} = \vec{S}_i + l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} + R_i \cdot \vec{s}_{i+1}$$

beschrieben. Das Vorzeichen von $R_i \vec{s}_i$ bzw. $R_i \vec{s}_{i+1}$ ist jetzt positiv, weil es eben die „Innen“-Parallelen sind. Im Schnittpunkt der beiden Parallelen gilt

$$\begin{aligned} \vec{S}_{i-1} + l_i \cdot \vec{t}_i + R_i \cdot \vec{s}_i &= \vec{S}_i + l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} + R_i \cdot \vec{s}_{i+1} \\ (\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i) + l_i \cdot \vec{t}_i - l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} + R_i (\vec{s}_i - \vec{s}_{i+1}) &= 0 \\ -L_i \vec{t}_i + l_i \cdot \vec{t}_i - l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} + R_i (\vec{s}_i - \vec{s}_{i+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplikation mit \vec{s}_i bzw. \vec{s}_{i+1} liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} -l_{i+1}(\vec{t}_{i+1}\vec{s}_i) + R_i(1 - (\vec{s}_{i+1}\vec{s}_i)) &= 0 \\ -l_{i+1}\sin E_i + R_i(1 + \cos E_i) &= 0 \\ l_{i+1} &= \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} -L_i(\vec{t}_i\vec{s}_i) + l_i(\vec{t}_i\vec{s}_{i+1}) + R_i((\vec{s}_i\vec{s}_{i+1}) - 1) &= 0 \\ L_i\sin E_i - l_i\sin E_i - R_i(1 + \cos E_i) &= 0 \\ (L_i - l_i)\sin E_i - R_i(1 + \cos E_i) &= 0 \\ l_i &= L_i - \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} . \end{aligned}$$

Der Kreisbogen beginnt also auf der i -ten Kante um $\frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i}$ bevor das Ende der Kante erreicht ist und er endet genau soweit in die $i+1$ -te Kante hinein.

Das Ende der geraden Fräserbahn entlang der geraden Abschnitte der i -ten Kante wird genauso mit der „äußeren“ Parallelen berechnet, wie im Fall der „eckigen“ Konturen auch schon: Das Ende der geraden Bahn liegt um $-r\vec{s}_i$ (d.h. nach aussen) verschoben, querab vom Punkt $\vec{p}_i(l_i)$:

$$\vec{b}_i(w_i) = \vec{S}_{i-1} - r\vec{s}_i + w_i\vec{t}_i = \vec{p}_i(l_i) - r\vec{s}_i = \vec{S}_{i-1} - r\vec{s}_i + l_i\vec{t}_i .$$

Daraus folgt sofort

$$w_i = l_i = L_i - \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} ,$$

und analog für den Beginn der Bahn entlang des geraden Abschnitts der $i+1$ -ten Kante

$$w_{i+1} = l_{i+1} = \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} .$$

Der Radius der Bahn zwischen diesen beiden Punkten ist natürlich $R_i + r$. Der Mittelpunkt \vec{M}_i des Kreisbogens liegt bei

$$\begin{aligned} \vec{M}_i &= \vec{p}_i(l_i) + R_i\vec{s}_i \\ &= (\vec{S}_{i-1} + R_i\vec{s}_i) + \left(L_i - \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} \right) \cdot \vec{t}_i \\ &= (\vec{S}_{i-1} + R_i\vec{s}_i + L_i\vec{t}_i) - \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} \vec{t}_i . \end{aligned}$$

Wenn also die i -te Kante in Richtung

$$\vec{t}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix}$$

verläuft, dann sind die Koordinaten des Kreisbogen-Mittelpunktes

$$\vec{M}_i = \begin{pmatrix} M_{i,x} \\ M_{i,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{i-1,x} - R_i t_{i,y} + \left(L_i - \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} \right) t_{i,x} \\ S_{i-1,y} + R_i t_{i,x} + \left(L_i - \frac{R_i(1 + \cos E_i)}{\sin E_i} \right) t_{i,y} \end{pmatrix} .$$

Auf diese Weise lassen sich, von Punkt zu Punkt, alle für die Fräsbahn wesentlichen Koordinaten berechnen.