CNC
Bahn des Fräskopfes berechnen (in 2 Dimensionen)

Koordinatensystem:
Der Nullpunkt des Koordinatensystems liegt im Schwerpunkt des Teils.

Vorzeichen des Drehsinns:
Drehungen im Gegenuhrzeigersinn haben ein positives Vorzeichen.

Richtungsvektoren:
Alle Richtungsvektoren sind Einheitsvektoren.

Kontur:
Diese Berechnung beschäftigt sich mit der Aussenkontur (Aussenumriss) des Werkstücks, nicht mit Innenkonturen (Ausbrüche u.Ä.).

1. Eckige Konturen

Die Kontur des Werkstücks wird durch ihre Eckpunkte $\vec{S}_i$ beschrieben. Die Eckpunkte sind gleichzeitig auch die Schnittpunkte der Kanten des Werkstücks, die durch die Richtungsvektoren $\vec{t}_i$ beschrieben werden

$$\vec{t}_i = \frac{\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i}{\left|\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i\right|} \quad .$$

(Das „t“ steht auch für „Tangente“). Jeder Punkt $\vec{p}_i(l_i)$ der Kontur wird durch

$$\vec{p}_i(l_i) = \vec{S}_{i-1} + l_i \cdot \vec{t}_i$$

beschrieben. l_i ist der Längenparameter

$$0 \le l_i \le \left|\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i\right| = L_i \quad ;$$

d.h.

$$\vec{p}_i(L_i) = \vec{S}_{i-1} + L_i \cdot \vec{t}_i = \vec{S}_i \quad \text{und} \quad L_i \cdot \vec{t}_i = \left(\vec{S}_i - \vec{S}_{i-1}\right) \quad .$$

L_i ist die Länge der Kontur zwischen $\vec{S}_{i-1}$ und $\vec{S}_i$. Beim Fräsen werden die I Eckpunkte in der Reihenfolge

$$\vec{S}_0 \quad , \quad \vec{S}_1 \quad ,\ldots , \quad \vec{S}_i \quad ,.., \quad \vec{S}_{I-1}$$

im Gegenuhrzeigersinn umfahren.

Der Fräser soll den Radius r haben. Die Bahn des Fräskopfes ist der Weg, den der Mittelpunkt des Fräsers zurücklegt. Die Eckpunkte der Bahn sind

$$\vec{B}_0 \quad , \quad \vec{B}_1 \quad ,\ldots , \quad \vec{B}_i \quad ,.., \quad \vec{B}_{I-1} \quad .$$

Sie muss parallel zu den Kanten des Werkstücks verlaufen, aber um r „nach aussen“ versetzt. D.h. der Mittelpunkt des Fräsers befindet sich immer um die Distanz r entlang des Richtungsvekors $\vec{s}_i$ von der Kontur versetzt. Der Vektor $\vec{s}_i$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor $\vec{t}_i$ der zugehörigen Kante. D.h. mit $\vec{t}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix}$ und $\vec{s}_i = \begin{pmatrix} s_{i,x} \\ s_{i,y} \end{pmatrix}$ soll gelten:

$\vec{t}_i \times \vec{s}_i = 1$. Also ist $\vec{s}_i = \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix}$, denn $\vec{t}_i \times \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = t_{i,x}^2 + t_{i,y}^2 = 1$ und

$\vec{t}_i \cdot \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = -t_{i,x} t_{i,y} + t_{i,y} t_{i,x} = 0$, wie gewünscht.

Hier noch ein paar Eigenschaften der Richtungsvektoren $\vec{t}_i$ und $\vec{s}_i$:

$$\vec{t}_i \cdot \vec{t}_{i+1} = -\begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} = t_{i,x} t_{i+1,x} + t_{i,y} t_{i+1,y} = -\cos E_i$$

E_i ist der Innenwinkel zwischen der i -ten und der $i+1$ -ten Abschnitt der Kontur; der Winkel dessen Scheitel im Eckpunkt $\vec{S}_{i+1}$ liegt.

$$\vec{t}_i \times \vec{t}_{i+1} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} = t_{i,x} t_{i+1,y} - t_{i,y} t_{i+1,y} = \sin E_i \quad .$$

$$\vec{s}_i \times \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = -t_{i,y} t_{i+1,x} + t_{i,x} t_{i+1,y} = \vec{t}_i \times \vec{t}_{i+1} = \sin E_i \quad .$$

$$\vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = t_{i,y} t_{i+1,y} + t_{i,x} t_{i+1,x} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} = -\cos E_i$$

$$\vec{t}_i \cdot \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = -t_{i,x} t_{i+1,y} + t_{i,y} t_{i+1,x} = \vec{t}_{i+1} \times \vec{t}_i = -\sin E_i$$

$$\vec{t}_{i+1} \cdot \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = -t_{i+1,x} t_{i,y} + t_{i+1,y} t_{i,x} = \vec{t}_i \times \vec{t}_{i+1} = \sin E_i$$

$$\vec{t}_i \times \vec{s}_{i+1} = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i+1,y} \\ t_{i+1,x} \end{pmatrix} = t_{i,x} t_{i+1,x} + t_{i,y} t_{i+1,y} = \vec{t}_{i+1} \cdot \vec{t}_i = -\cos E_i$$

$$\vec{t}_{i+1} \times \vec{s}_i = \begin{pmatrix} t_{i+1,x} \\ t_{i+1,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t_{i,y} \\ t_{i,x} \end{pmatrix} = t_{i+1,x} t_{i,x} + t_{i+1,y} t_{i,y} = \vec{t}_{i+1} \cdot \vec{t}_i = -\cos E_i$$

So, jetzt geht's weiter: „Nach aussen versetzt“ bedeutet, weil der Nullpunkt des Koordinatensystems sich im Schwerpunkt des Werkstücks befindet, und es sich um die Aussenkontur handelt, dass die Fräsbahn durch die Punkte

$$\vec{b}(l_i) = \vec{p}(l_i) - r\vec{s}_i = \vec{S}_{i-1} - r\vec{s}_i + l_i \cdot \vec{t}_i$$

verläuft. Dass vor $r \cdot \vec{s}_i$ ein Minuszeichen stehen muss sieht man wie folgt: Die obere Kante der Kontur verläuft in den beiden oberen Quadranten des Koordinatensystems, und wird im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Angenommen,

$\vec{t}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{s}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Damit die Fräsbahn „nach aussen“ versetzt

verläuft, muss folglich vor $r \cdot \vec{s}_i$ also das Minuszeichen stehen.

Der Eckpunkt $\vec{B}_i$ der Fräsbahn, beim Eckpunkt $\vec{S}_i$ der Kontur, ist durch den Schnittpunkt der Bahnabschnitte $\vec{b}_i(l_i)$ und $\vec{b}_{i+1}(l_{i+1})$ gegeben:

$$\vec{B}_i = \vec{S}_{i-1} - r\vec{s}_i + w_i \cdot \vec{t}_i = \vec{S}_i - r\vec{s}_{i+1} + w_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1}$$
$$\left(\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i\right) + r\left(\vec{s}_{i+1} - \vec{s}_i\right) + w_i \cdot \vec{t}_i - w_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} = 0$$

Definitionsgemäss ist $\left(\vec{S}_i - \vec{S}_{i-1}\right) = L_i \cdot \vec{t}_i$, also

$$r\left(\vec{s}_{i+1} - \vec{s}_i\right) + \left(w_i - L_i\right) \cdot \vec{t}_i - w_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} = 0 \quad .$$

w_i und w_{i+1} sind die Weglängen, die der Fräser entlang der Bahn von $\vec{B}_i$ nach $\vec{B}_{i+1}$ bzw. von $\vec{B}_{i+1}$ nach $\vec{B}_{i+2}$ zurückgelegt hat. Durch skalare Multiplikation mit $\vec{s}_i$ und mit $\vec{s}_{i+1}$ bekommt man daraus

$$r\left(\left(\vec{s}_{i+1}\vec{s}_i\right) - 1\right) - w_{i+1} \cdot \left(\vec{t}_{i+1}\vec{s}_i\right) = 0$$
$$r\left(-\cos E_i - 1\right) - w_{i+1} \cdot \sin E_i = 0$$
$$w_{i+1} = -\frac{r\left(1 + \cos E_i\right)}{\sin E_i} \quad .$$

und

$$r\left(1 - \left(\vec{s}_i \vec{s}_{i+1}\right)\right) + \left(w_i - L_i\right) \cdot \left(\vec{t}_i \vec{s}_{i+1}\right) = 0$$
$$r\left(1 + \cos E_i\right) + \left(w_i - L_i\right) \cdot \left(-\sin E_i\right) = 0$$
$$-r\left(1 + \cos E_i\right) + \left(w_i - L_i\right) \cdot \sin E_i = 0$$
$$w_i = \left(L_i + \frac{r\left(1 + \cos E_i\right)}{\sin E_i}\right) \quad .$$

Was bedeutet das? Na ja, man muss bedenken, dass der Nullpunkt ($w_{i+1} = 0$) der Fräserbahn entlang der Kontur von $\vec{S}_{i+1}$ nach $\vec{S}_{i+2}$ querab von $\vec{S}_{i+1}$ liegt. Wenn der Winkel E_i gerade $+90°$ beträgt (d.h. es geht „linksherum“ um die Ecke bei $\vec{S}_{i+1}$), dann ist

$$w_{i+1} = -\frac{r(1)}{1} = -r \quad ,$$

und

$$w_i = \left(L_i + \frac{r(1)}{1}\right) = (L_i + r) \quad .$$

Die zweite Gleichung bedeutet, dass der Fräser entlang dem Bahnstück von $\vec{B}_i$ nach $\vec{B}_{i+1}$ um die Länge r (nämlich einen Fräserradius) über das Ende der Konturkante hinausfahren muss. Die erste Gleichung besagt, dass er auf dem Bahnstück von $\vec{B}_{i+1}$ nach $\vec{B}_{i+2}$ eine Sonderschicht von der Länge r einlegen muss, bevor er auf gleicher Höhe mit dem Beginn der $i+1$ -ten Kante der Kontur ist.

Das alles gilt, wenn der rechte Winkel ein „Aussenwinkel“ ist, d.h. einen konvexen Konturabschnitt bildet. Wenn der rechte Winkel „linksherum“ geht, dann beträgt er $-90°$ und der Sinus im Nenner wechselt das Vorzeichen:

$$w'_{i+1} = -\frac{r(1)}{-1} = r \quad \text{und} \quad w'_i = \left(L_i + \frac{r(1)}{-1}\right) = (L_i - r) \quad .$$

Damit wollen die Gleichungen sagen, dass (zweite Gleichung) der Fräser nun schon um die Länge r vor Erreichen des Winkels aufhören darf; bzw. (erste Gleichung) er auch sofort schon die Länge r des nächsten Bahnstücks gefräst hat.

Also, die Gleichungen beschreiben offenbar die Verhältnisse bei „eckigen“ Konturen richtig. Jetzt kommen die Rundungen ;-).

2. Ecken auf Kreisbogen umfahren („rund achtern“)

An einer Ecke fährt der Fräser jetzt so weit über das Ende der aktuellen Kante hinaus, bis zu dem Punkt, an dem die Richtungen beider Kanten, der aktuellen und der nächsten, Tangenten an den Fräskopf bilden. Bei sehr spitzen Ecken kann dieser Punkt sehr weit vom Ende der Kanten entfernt liegen. Um dieses weite „Ausholen“ der Fräsbahn zu vermeiden, kann man den Fräser„um die Ecke rollen“ lassen: Er soll sich auf einem Kreisbogen um die Ecke bewegen, dessen Mittelpunkt die Ecke, und dessen Radius gleich dem Radius des Fräsers ist.

Der Kreisbogen beginnt querab vom Ende der i -ten Kante und endet querab vom Anfang der $i+1$ -ten Kante. Der Anfangspunkt liegt also bei

$$\vec{p}'_i(l_i) = \vec{S}_{i-1} + L_i \vec{t}_{i-1} - r\vec{t}_{i-1} = \vec{S}_i - r\vec{t}_{i-1} \quad ,$$

der Endpunkt bei

$$\vec{p}'_{i+1}(l_{i+1}) = \vec{S}_i - r\vec{t}_{i+1} \quad ;$$

der Mittelpunkt ist natürlich $\vec{M}_i = \vec{S}_i$.

3. Kontur mit abgerundeten Ecken

Wenn die Ecken abgerundet werden sollen, dann soll die Kontur einen Kreisbogen beschreiben, dessen Tangenten die anschliessenden geraden Kanten bilden. Der Mittelpunkt des Kreisbogens liegt deshalb auf der Winkelhalbierenden der Kanten; und zwar innerhalb der Kontur, wenn es sich um einen „Aussenwinkel“ (konvexer Konturabschnitt), und ausserhalb der Kontur, wenn es um einen „Innenwinkel“ geht (konkaver Konturabschnitt).

Der Kreisbogenradius an der Ecke zwischen $\vec{S}_i$ und $\vec{S}_{i+1}$ soll R_i betragen. Da, wo sich die beiden („Innen-“) Parallelen, mit Abstand R_i zu den Kanten, schneiden, liegt der Mittelpunkt des Kreisbogens. Die Parallele zur i -ten Kante wird durch

$$\vec{p}_i(l_i) \;+\; R_i \cdot \vec{s}_i \;=\; \vec{S}_{i-1} \;+\; l_i \cdot \vec{t}_i \;+\; R_i \cdot \vec{s}_i \quad ,$$

die zur $i+1$ -ten Kante durch

$$\vec{p}_{i+1}(l_{i+1}) \;+\; R_i \cdot \vec{s}_{i+1} \;=\; \vec{S}_i \;+\; l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} \;+\; R_i \cdot \vec{s}_{i+1}$$

beschrieben. Das Vorzeichen von $R_i \vec{s}_i$ bzw. $R_i \vec{s}_{i+1}$ ist jetzt positiv, weil es eben die „Innen“-Parallelen sind. Im Schnittpunkt der beiden Parallelen gilt

$$\begin{aligned}
&\vec{S}_{i-1} \;+\; l_i \cdot \vec{t}_i \;+\; R_i \cdot \vec{s}_i \;=\; \vec{S}_i \;+\; l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} \;+\; R_i \cdot \vec{s}_{i+1} \\
&\left(\vec{S}_{i-1} - \vec{S}_i\right) \;+\; l_i \cdot \vec{t}_i \;-\; l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} \;+\; R_i\left(\vec{s}_i - \vec{s}_{i+1}\right) \;=\; 0 \\
&-L_i \vec{t}_i \;+\; l_i \cdot \vec{t}_i \;-\; l_{i+1} \cdot \vec{t}_{i+1} \;+\; R_i\left(\vec{s}_i - \vec{s}_{i+1}\right) \;=\; 0
\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\vec{s}_i$ bzw. $\vec{s}_{i+1}$ liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&-l_{i+1}\left(\vec{t}_{i+1} \vec{s}_i\right) \;+\; R_i\left(1 - \left(\vec{s}_{i+1} \vec{s}_i\right)\right) \;=\; 0 \\
&-l_{i+1} \sin E_i \;+\; R_i\left(1 + \cos E_i\right) \;=\; 0 \\
&l_{i+1} \;=\; \frac{R_i\left(1 + \cos E_i\right)}{\sin E_i}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&-L_i\left(\vec{t}_i \vec{s}_i\right) \;+\; l_i\left(\vec{t}_i \vec{s}_{i+1}\right) \;+\; R_i\left(\left(\vec{s}_i \vec{s}_{i+1}\right) - 1\right) \;=\; 0 \\
&L_i \sin E_i \;-\; l_i \sin E_i \;-\; R_i\left(1 + \cos E_i\right) \;=\; 0 \\
&\left(L_i - l_i\right) \sin E_i \;-\; R_i\left(1 + \cos E_i\right) \;=\; 0 \\
&l_i \;=\; L_i \;-\; \frac{R_i\left(1 + \cos E_i\right)}{\sin E_i} \quad .
\end{aligned}$$

Der Kreisbogen beginnt also auf der i -ten Kante um $\frac{R_i\left(1 + \cos E_i\right)}{\sin E_i}$ bevor das Ende der Kante erreicht ist und er endet genausoweit in die $i+1$ -te Kante hinein.

Das Ende der geraden Fräserbahn entlang der geraden Abschnitte der i -ten Kante wird genauso mit der „äusseren“ Parallelen berechnet, wie im Fall der „eckigen“ Konturen auch schon: Das Ende der geraden Bahn liegt um $-r\cdot\vec{s}_i$ (d.h. nach aussen) verschoben, querab vom Punkt $\vec{p}_i(l_i)$:

$$\vec{b}_i(w_i) = \vec{S}_{i-1} - r\vec{s}_i + w_i\cdot\vec{t}_i = \vec{p}_i(l_i) - r_i\vec{s}_i = \vec{S}_{i-1} - r_i\vec{s}_i + l_i\vec{t}_i \ .$$

Daraus folgt sofort

$$w_i = l_i = L_i - \frac{R_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i} \ ,$$

und analog für den Beginn der Bahn entlang des geraden Abschnitts der $i+1$ -ten Kante

$$w_{i+1} = l_{i+1} = \frac{R_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i} \ .$$

Der Radius der Bahn zwischen diesen beiden Punkten ist natürlich R_i+r . Der Mittelpunkt $\vec{M}_i$ des Kreisbogens liegt bei

$$\begin{aligned}\vec{M}_i &= \vec{p}_i(l_i)+R_i\vec{s}_i \\ &= \left(\vec{S}_{i-1}+R_i\vec{s}_i\right) + \left(L_i - \frac{R_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i}\right)\cdot\vec{t}_i \\ &= \left(\vec{S}_{i-1}+R_i\vec{s}_i+L_i\vec{t}_i\right) - \frac{R_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i}\vec{t}_i \ .\end{aligned}$$

Wenn also die i -te Kante in Richtung

$$\vec{t}_i = \begin{pmatrix} t_{i,x} \\ t_{i,y} \end{pmatrix}$$

verläuft, dann sind die Koordinaten des Kreisbogen-Mittelpunktes

$$\vec{M}_i = \begin{pmatrix} M_{i,x} \\ M_{i,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{i-1,x} - R_i t_{i,y} + \left(L_i - \frac{R_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i}\right)t_{i,x} \\ S_{i-1,y} + R_i t_{i,x} + \left(L_i - \frac{R_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i}\right)t_{i,y} \end{pmatrix} \ .$$

Auf diese Weise lassen sich, von Punkt zu Punkt, alle für die Fräsbahn wesentlichen Koordinaten berechnen.

4. Fasen einfügen

Es hat mechanisch keinen Sinn, dünnere Ecken auszufräsen, als es die Festigkeit des Material verträgt. Es ist besser, an der Stelle, an der die Ecke eine Mindestdicke D_i unterschreitet, eine Gerade einzufügen, die die Ecke „abschneidet“. Die folgende Berechnung liefert die Koordinaten, an denen diese Gerade, die Fase, (auf der i -ten Kante) beginnt und (auf der $i+1$ -ten Kante) endet.

Die Mindestdicke wird entlang des Lotes von der Winkelhalbierenden auf die beiden Kanten gemessen. Die Schnittpukte des Lotes mit den beiden Kanten liegen auf den Parallelen zur Winkelhalbierenden im Abstand $\pm\frac{D_i}{2}$. Der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden ist

$$\vec{e}_i = \left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)\sqrt{\frac{2}{1+\cos E_i}} \quad ; \quad \vec{e}_i\cdot\vec{e}_i = 1$$

Die Gleichung für die Winkelhalbierende im Eckpunkt $\vec{S}_i$ lautet

$$\vec{u}_i(h_i) = \vec{S}_i+h_i\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)\sqrt{\frac{2}{1+\cos E_i}} \quad .$$

Der Richtungsvektor senkrecht zur Richtung der Winkelhalbierenden ist $\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)\sqrt{\frac{2}{1+\cos E_i}}$,

denn

$$\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right) = \vec{s}_{i+1}\vec{t}_{i+1}-\vec{s}_i\vec{t}_{i+1}-\vec{s}_{i+1}\vec{t}_i+\vec{s}_i\vec{t}_i = -\vec{s}_i\vec{t}_{i+1}-\vec{s}_{i+1}\vec{t}_i$$
$$= -\sin E_i-(-\sin E_i) = 0$$

Für den unhandlichen Vorfaktor benutzen wir die Abkürzung

$$\sqrt{\frac{2}{1+\cos E_i}} = c_i = \frac{1}{\cos\left(\frac{E_i}{2}\right)}$$

Also kann man die beiden Parallelen im Abstand $\pm\frac{D_i}{2}$ zur Winkelhalbierenden mit den Formeln

$$\vec{u}'_i(h_i) = \vec{S}_i+h_i\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)c_i+\frac{D_i}{2}\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)c_i \quad \text{und}$$
$$\vec{u}''_i(h_i) = \vec{S}_i+h_i\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)c_i-\frac{D_i}{2}\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)c_i$$

darstellen. Die erste Formel (mit dem „+“-Zeichen vor dem $\frac{D_i}{2}$) bescheibt die Parallele auf der Seite der i -ten Kante, die andere die auf der Seite der $i+1$ -ten Kante. Der Faktor 4 im Nenner kommt von der Mulitplikation von Abstand und dem Vorfaktor des Lot-Vektors. Gesucht sind die Schnittpunkte dieser beiden mit den zugehörigen Kanten. Im Schnittpunkt der ersten Parallelen mit der i -ten Kante gilt die Gleichung

$$\vec{S}_i+h_i\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)c_i+\frac{D_i}{2}\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)c_i \;=\; \vec{S}_{i-1}+l_i\vec{t}_i \quad ,$$

gesucht ist der Wert von l_i .

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{S}_i-\vec{S}_{i-1}\right)+\frac{D_i}{2}\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)c_i+h_i\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)c_i-l_i\vec{t}_i \;=\; 0\\
&2L_i\vec{t}_i+D_i\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)c_i+2h_i\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)c_i-2l_i\vec{t}_i \;=\; 0\\
&2l_i\vec{t}_i-h_i\left(\vec{t}_{i+1}-\vec{t}_i\right)c_i \;=\; 2L_i\vec{t}_i+D_i\left(\vec{s}_{i+1}-\vec{s}_i\right)c_i
\end{aligned}$$

Multiplizieren mit $\vec{t}_i$ liefert:

$$\begin{aligned}
&2l_i-h_i\left(\left(\vec{t}_{i+1}\vec{t}_i\right)-1\right)c_i \;=\; 2L_i+D_i\left(\vec{s}_{i+1}\vec{t}_i\right)c_i\\
&2l_i-h_i\left(-\cos E_i-1\right)c_i \;=\; 2L_i+D_i\left(-\sin E_i\right)c_i\\
&2l_i+h_ic_i\left(1+\cos E_i\right) \;=\; 2L_i-D_ic_i\sin E_i
\end{aligned}$$

Multiplizieren mit $\vec{s}_i$ liefert:

$$\begin{aligned}
&-h_i\left(\vec{t}_{i+1}\vec{s}_i\right)c_i \;=\; D_i\left(\vec{s}_{i+1}\vec{s}_i-1\right)c_i\\
&-h_i\sin E_i \;=\; D_i\left(-\cos E_i-1\right)\\
&h_i \;=\; \frac{D_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i} \quad .
\end{aligned}$$

Und damit findet man den gesuchten Wert

$$\begin{aligned}
&2l_i+c_i\left(1+\cos E_i\right)\frac{D_i\left(1+\cos E_i\right)}{\sin E_i} \;=\; 2L_i-D_ic_i\sin E_i\\
&2l_i\sin E_i+D_ic_i\left(1+\cos E_i\right)^2 \;=\; \left(2L_i-D_ic_i\sin E_i\right)\sin E_i\\
&2l_i\sin E_i \;=\; \left(2L_i-D_ic_i\sin E_i\right)\sin E_i-D_ic_i\left(1+\cos E_i\right)^2\\
&2l_i\sin E_i \;=\; 2L_i\sin E_i-D_ic_i\sin^2 E_i-D_if_i-2D_ic_i\cos E_i-D_ic_i\cos^2 E_i\\
&2l_i\sin E_i \;=\; 2L_i\sin E_i-2D_ic_i-2D_ic_i\cos E_i\\
&l_i \;=\; L_i-D_if_i\frac{1+\cos E_i}{2\sin E_i} \;=\; L_i-D_i\sqrt{\frac{2}{1+\cos E_i}}\cdot\frac{1+\cos E_i}{2\sin E_i}\\
&\quad=\; L_i-\;D_i\cdot\sqrt{\frac{1+\cos E_i}{2\sin^2 E_i}} \;=\; L_i-\;D_i\cdot\sqrt{\frac{1+\cos E_i}{2\left(1-\cos^2 E_i\right)}}\\
&\quad=\; L_i-\;D_i\cdot\sqrt{\frac{1+\cos E_i}{2\left(1-\cos E_i\right)\left(1+\cos E_i\right)}} \;=\; L_i-\;\frac{D_i}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\left(1-\cos E_i\right)}}\\
&\quad=\; L_i-\;\frac{D_i}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)} \quad .
\end{aligned}$$

Und weil das Ganze zur Winkelhalbierenden symmetrisch ist, muss entlang der $i+1$ -ten Kante gelten:

$$l_{i+1} = \frac{D_i}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)} \quad .$$

Die Fase verläuft also in Richtung

$$\vec{S}_{i-1}+\left(L_i-\frac{D_i}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)}\right)\vec{t}_i-\vec{S}_i-\left(\frac{D_i}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)}\right)\vec{t}_{i+1} = -\left(\frac{D_i}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)}\right)\left(\vec{t}_i+\vec{t}_{i+1}\right) \quad .$$

Die Geradengleichung der Fase (mit normiertem Richtungsvektor) ist also

$$\vec{f}_i = \vec{S}_i-\frac{D_i}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)}\vec{t}_i+\frac{g_i}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)}\left(\vec{t}_i+\vec{t}_{i+1}\right) = \vec{S}_i+\frac{1}{2\sin\left(\frac{E_i}{2}\right)}\left\{\left(g_i-D_i\right)\vec{t}_i+g_i\vec{t}_{i+1}\right\} \quad .$$

Man kann die Fase als zusätzliche Kante auffassen. Um sie in die Liste der Konturkanten einzufügen, werden alle Kanten-Nummern oberhalb der Nummer i um eins erhöht; was vorher die $i+1$ -te Kante war, ist jetzt die $i+2$ -te. Die Längen L_i und L_{i+2} der i -ten und der jetzt $i+2$ -ten Kante beide um den Betrag

$$\Delta_i = \frac{D_i}{2\sin\left(\frac{E'_i}{2}\right)}$$

gekürzt, wobei E'_i der alte Eckwinkel ist, also der zwischen den Vektoren, die jetzt $\vec{t}_i$ und $\vec{t}_{i+2}$ heissen. Der Punkt $\vec{S}_i$ verschiebt sich dementsprechend. Der neue Winkel E_i ist

$$E_i = \frac{\pi}{2}+E'_i = E_{i+1}$$

Zwischen dem neuen Endpunkt der i -ten und dem neuen Anfangspunkt der $i+2$ -ten Kante wird als neue $i+1$ -ten Kante die Fasenkante mit der Geradegleichung

$$\vec{p}_{i+1}(l_{i+1}) = \vec{S}_i + l_{i+1}\vec{t}_{i+1} \quad \text{mit} \quad \vec{t}_{i+1} = \frac{\left(\vec{t}_i+\vec{t}_{i+2}\right)}{2\sin\left(\frac{E'_i}{2}\right)} \quad .$$

An den Verrenkungen, die ich hier machen muss, um zwischen der alten Kantenliste und der neuen, nun um eine Kante erweiterten, zu unterscheiden zeigt schon, dass man unterschiedliche Mechanismen braucht, um Fasen und Abrundungen in der Fräskontur einzubauen. Das führt aber in den Organisation der Programmstruktur und die ist hier nicht das Thema.